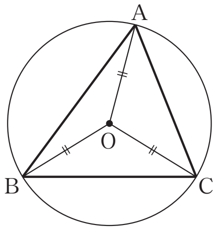
# 第9講　三角比と平面図形(2)

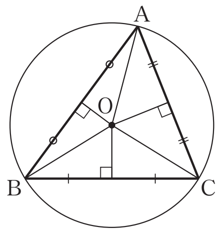
**【基礎確認事項】**

## ［1］　三角形の外接円と弦の垂直二等分線

□ △ABC の外心を O とすると，OA＝OB＝OC より，
△OAB，△OBC，△OCA は二等辺三角形であり，
O は弦 BC，弦 CA，弦 AB の垂直二等分線の交点である．
すなわち，次のことがいえる．

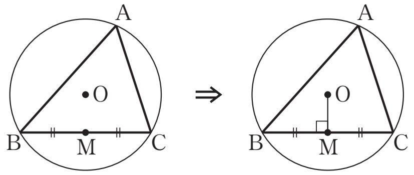



> 三角形の**外心**は，**3辺(3弦)の垂直二等分線の交点**である．

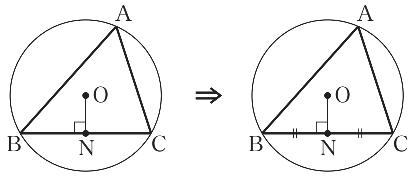



□また，これに関連して

・弦 BC の中点を M とすると，OM⊥BC



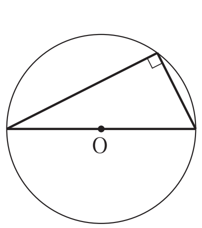

・O から弦 BC に垂線を下ろし，その交点を N とすると，N は弦 BC の中点



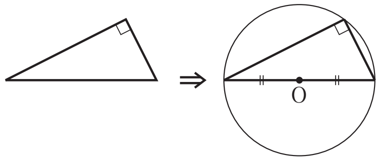

といったことがわかる．他の弦に関しても同様である．

## ［2］　三角形の外接円と弦の垂直二等分線

□円において，その半円の弧に対する円周角は 90° である．
そのことから，以下のことがいえる．




> 直角三角形の斜辺は，その三角形の外接円の直径に等しく，斜辺の中点は外接円の中心に等しい．



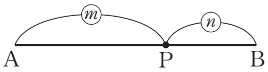

□［1］［2］の知識はいずれも「直角三角形」が絡み，それゆえ三角比の問題とのつながりが深い．三角形の辺が，その外接円の「弦」や「直径」になることに注意．

⇒　C&U 1



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

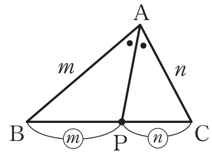
### ［２］　内分・外分と角の二等分線



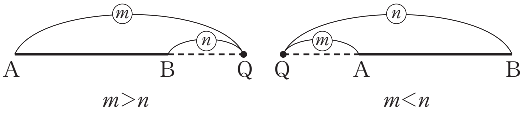

□$m>0$，$n>0$ とする．線分 AB 上の点 P が AP：PB＝$m$：$n$ を満たすとき，点 P は線分 AB を $m$：$n$ に**内分**するという．

□三角形の内角の二等分線について，次のことが成り立つ．

> △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点 P について
> **BP：PC＝AB：AC**
> つまり，P は BC を AB：AC に内分する．

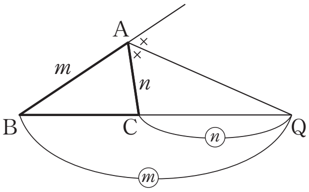



□$m \neq n$ とする．線分 AB の延長上の点 Q が AQ：QB＝$m$：$n$ を満たすとき，点 Q は線分 AB を $m$：$n$ に**外分**するという．




□三角形の外角の二等分線について，次のことが成り立つ．

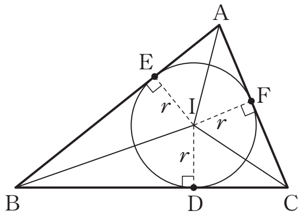
> △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点 Q について
> **BQ：QC＝AB：AC**
> つまり，Q は BC を AB：AC に外分する．



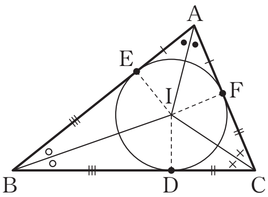

⇒　C&U ２

### ［３］　三角形の内接円と角の二等分線

□ △ABC の内心を I とし，右図の接点 D，E，F について，
△AEI≡△AFI，△BDI≡△BEI，△CDI≡△CFI であり，
I は $A$，$B$，$C$ の角の二等分線の交点である．
すなわち，次のことがいえる．



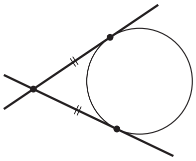

> **三角形の内心は，３つの内角の二等分線の交点**である．




□一般に，円の外部から接線を引くとき，その点と接点までの距離を**接線の長さ**という．

□接線は２本引くことができ，上図において AE＝AF，BD＝BE，CD＝CF である．
つまり，

> 円の外部から引いた**２本の接線の長さは等しい**．



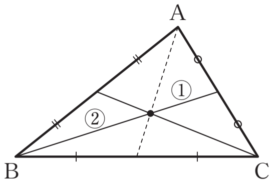
□［３］の知識もまた，三角比の問題とのつながりが深い．三角形の辺がその内接円の「接線」となることに注意．また，各辺と内接円の半径が，その接点で「垂直」に交わることにも注意．

⇒　C&U ３ ４



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

### ［4］ 三角形の五心




□三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を三角形の**中線**という．

□三角形の3本の中線は1点で交わり，その交点を三角形の**重心**という．

□三角形の重心について次のことが成り立つ．

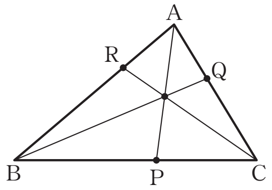
**三角形の中線は，重心によって2：1に内分される．**

□三角形の3頂点からそれぞれの対辺に下ろした3本の垂線は1点で交わり，その交点を**垂心**という．

□三角形の2つの外角の二等分線の交点は，残り1つの内角の二等分線上にある．この交点を**傍心**という．三角形の傍心は3つある．

□三角形の内心・外心・重心・垂心・傍心をあわせて三角形の**五心**という．

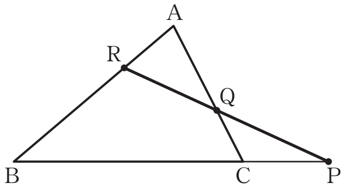
### ［5］ チェバの定理・メネラウスの定理




□右図において，次の式が成り立つ．

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

これを**チェバの定理**という．



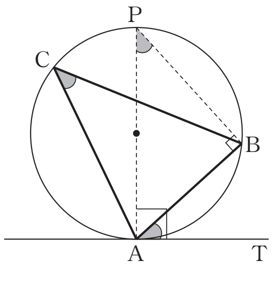

□右図において，次の式が成り立つ．

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

これを**メネラウスの定理**という．

⇒ C&U 5

### ［6］ 接弦定理と方べきの定理




□右図において，

$\angle BAT=90^\circ-\angle BAP$，$\angle APB=90^\circ-\angle BAP$ より

$\angle BAT=\angle APB$

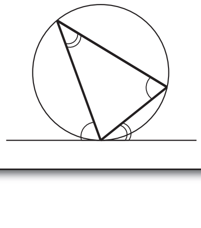
である．また，弧ABに対する円周角を考えると

$\angle APB=\angle ACB$

である．よって，$\angle BAT=\angle ACB$ である．

一般的に次の定理が成り立つ．

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は
その角の内側にある弧に対する円周角に等しい．
これを**接弦定理**という．

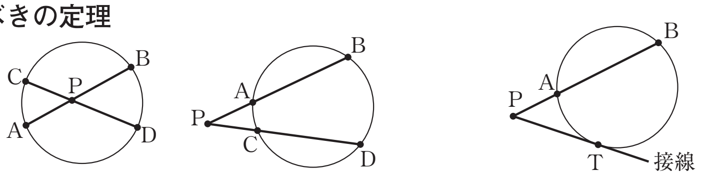




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□円内，または円外の１点から円と共有点をもつように引いた２本の直線に関して，次の定理が成り立つ．いずれも三角形の相似により証明できる．

**方べきの定理**




PA・PB＝PC・PD　　　　PA・PB＝PT²

⇒　C&U 6 7

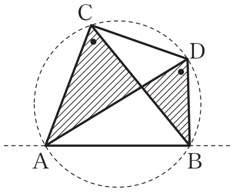
［７］　円に内接する四角形

□どんな三角形にも必ず外接円がただ１つ存在するが，それ以外の多角形では必ずしも外接円が存在するとは限らない．

□ある四角形が円に内接するための条件として主に使われるものに以下がある．

**円周角の定理の逆**

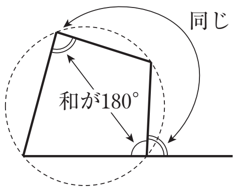
４点 A，B，C，D について，点 C，D が直線 AB に関して同じ側にあり，∠ACB＝∠ADB である．




**対角の和**

・対角の和が 180°

・内角がその対角の外角に等しい




⇒　C&U 8

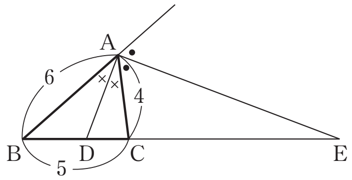


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

## 【CHECK & UP】

**1**　BC＝6，∠C＝90°の直角三角形ABCにおいて，その外接円Oの半径が5である．このとき，cos∠BACの値を求めよ．また，外接円の中心OからACに下ろした垂線とACとの交点をMとするとき，線分OMの長さを求めよ．

**2**　AB＝6，BC＝5，CA＝4である△ABCにおいて，∠Aおよびその外角の二等分線が直線BCと交わる点をそれぞれD，Eとする．線分DEの長さを求めよ．



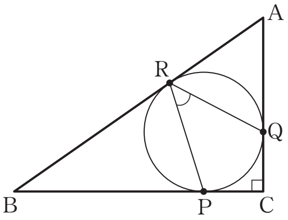

**3**　∠A＝60°の三角形ABCにおいて，その内接円の中心をIとする．∠BICの大きさを求めよ．

**4**　AB＝5，BC＝4，CA＝3である直角三角形ABCにおいて，その内接円の中心をI，半径を$r$とする．$r$およびcos∠IBCの値を求めよ．

**5**　△ABCの辺ABを2：3に内分する点をP，辺ACを1：2に内分する点をQとする．線分BQと線分CPの交点をO，直線AOと辺BCの交点をRとする．次の三角形の面積比を求めよ．

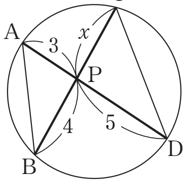
(1)　△AOB：△AOC　　　(2)　△ABC：△OBC

**6**　∠C＝90°の直角三角形ABCにおいて，右図のように△ABCとその内接円との接点をP，Q，Rとする．このとき∠PRQの大きさを求めよ．

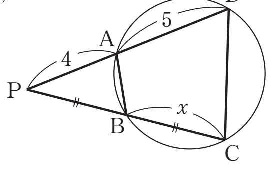



**7**　次の図において$x$の値を求めよ．ただし，Tは接点である．

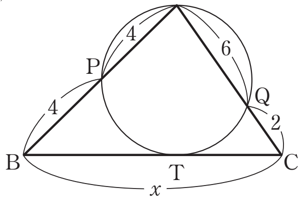
(1)




(2)

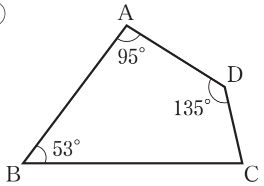



(3)

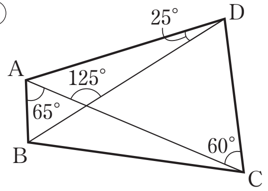



**8**　次の四角形ABCDのうち，円に内接するものを選べ．

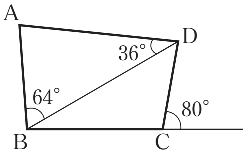
①




②




③






©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第9講　三角比と平面図形(2)

**1**　(1)　△ABC において，AB＝5，AC＝4，∠A＝60° とする．∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

(2)　△ABC において，BC＝5，CA＝4，AB＝6 とする．∠C の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している．このとき，次のものを求めよ．

(1)　対角線 AC の長さ

(2)　四角形 ABCD の面積

(3)　対角線 AC と BD の交点を E とするとき，BE：ED



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 $\triangle$ABC において，AB＝5，BC＝7，CA＝3 とする．$\angle$A の二等分線が $\triangle$ABC の外接円と交わる点を D，直線 AD と直線 BC の交点を E とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\angle$A の大きさおよび線分 AE の長さを求めよ．

(2) 線分 BE，DE の長さを求めよ．

(3) 外接円の中心を O，半径を $R$ とする．$R$ の長さおよび $\tan\angle$OBD の値を求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第9講　三角比と平面図形(2)

△ABC において，AB＝15，AC＝10，∠A＝60° とすると，BC＝$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ である．∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると BD＝$\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$，AD＝$\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である．また $\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{キ}}{\sqrt{\boxed{ク}}}$ であることより，辺 BC の中点を E とすると AE＝$\dfrac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$ である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第9講　三角比と平面図形(2)

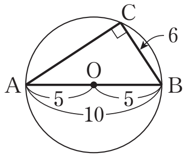
## 【CHECK & UP】

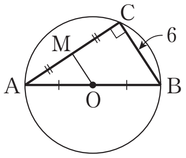
**1**　図より AC＝8，AB＝10

よって　$\cos\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{8}{10}=\mathbf{\dfrac{4}{5}}$

また，M は AC の中点であることから，

中点連結定理により　$\mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\mathbf{3}$




「直径→円周角 90°」に加え，直角三角形の斜辺がその外接円の直径であることを，その図を描くことと同時に利用できるようにすること．
　また，その中心から各辺（弦）に下ろした垂線がその辺を二等分することも必須の知識である．
　「直角」で「三角比の利用」を想定できるようになればしめたものである．

**2**　内角の二等分線の性質より BD：DC＝AB：AC＝3：2

よって　$\mathrm{DC}=\dfrac{2}{5}\mathrm{BC}=2$

外角の二等分線の性質より

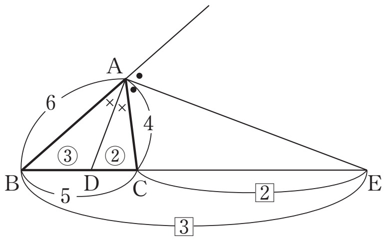
BE：EC＝AB：AC＝3：2

よって　CE＝$x$ とおくと

$(5+x):x=3:2$　　$3x=2(5+x)$

$x=10$　　つまり　CE＝10

したがって，DE＝DC＋CE＝2＋10＝**12**




特に内角の二等分線の性質は最重要項目の1つである．

**3**　内心の性質により，∠IBA＝∠IBC＝$x$，∠ICA＝∠ICB＝$y$ とする．

△ABC の内角の和より

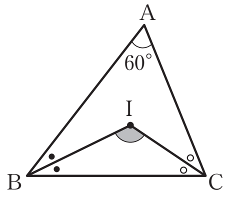
$60^\circ+2x+2y=180^\circ$

よって　$x+y=60^\circ$

△IBC の内角の和より

$\angle \mathrm{BIC}+x+y=180^\circ$

したがって　**∠BIC＝120°**




(内心)＝(内角の二等分線の交点)は忘れてはいけない知識である．今回は内接円を図示する必要はないが，図示する必要がある，または予め図示してある場合においても必要に応じて角の二等分線の知識を使えるように．また，角の二等分線と内心を強く結びつけておくこと．

**4**　内接円と辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ P，Q，R とすると

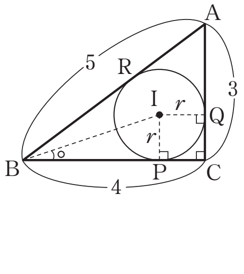
IP＝IQ＝$r$ である．よって四角形 IQCP は正方形となり

CP＝CQ＝$r$ である．

接線の長さは等しいので　BR＝BP＝$4-r$，AR＝AQ＝$3-r$

AB＝AR＋BR より　$(3-r)+(4-r)=5$

よって　$\boldsymbol{r=1}$　　このとき　BP＝3




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また △IBP で三平方の定理より

$\mathrm{BI}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

したがって

$$\cos\angle\mathrm{IBC}=\cos\angle\mathrm{IBP}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BI}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

三角比の知識を使うことで，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ により $r$ を求めることも可能であるが，「直角三角形」の場合においてはここで示した解法が望ましい（誘導がある場合は除く）．また，内接円を図示することで，「半径と辺（接線）が垂直 → 直角三角形における cos の定義」を使うことができる．もちろん，内心が内角の二等分線の交点であることも決して忘れてはならない．

5 (1)　チェバの定理を用いると

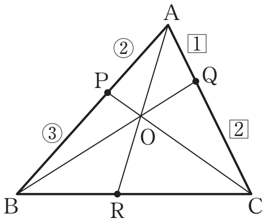
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

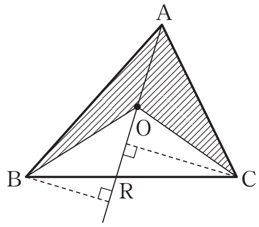
つまり　$\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{2}{1}=1$

よって　$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}=\frac{3}{4}$　より

BR：RC＝3：4

したがって　△AOB：△AOC＝BR：RC＝**3：4**




(2)　メネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=1$$

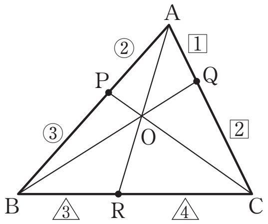
つまり　$\frac{7}{3}\cdot\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{1}{2}=1$

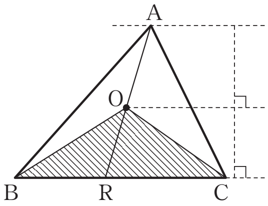
よって　$\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{OA}}=\frac{6}{7}$　より

AO：OR＝7：6

したがって

△ABC：△OBC＝AR：OR＝**13：6**



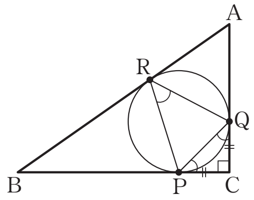

チェバの定理・メネラウスの定理を使える場面は決して多くはないが，三角形の割線が１点で交わる場合には注意しておきたい．また今回の問題で扱った「線分の比 → 面積比」の流れは今後も出てくるので，線分の比が２つの三角形（底辺が等しい）の「高さの比」に等しいことを図を参考に確認しておくこと．

6　△CPQ は CP＝CQ の直角二等辺三角形である．

よって，∠CPQ＝∠CQP＝45°

したがって接弦定理により

∠PRQ＝∠CPQ＝**45°**

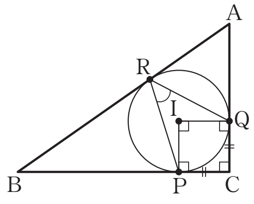



**【別解】**　内接円の中心を I とすると，

四角形 IPCQ は正方形であることより　∠PIQ＝90°

したがって

$$\angle\mathrm{PRQ}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{PIQ}=\mathbf{45°}$$




補助線の引き方で解法が異なるが，いずれの解法も「接線の長さが等しい」ことを利用していることに注意．特に【別解】については，「円周角は中心角がわかればよい」に基づき中心を設定したものである．闇雲に設定したのではなく，中心を設定することで「内接円の半径と接線が垂直」であることを用いることができる．内接円の半径を求める問題は既出．



ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**7** (1)　(△PAB∽△PCD　より　PA：PC＝PB：PD　よって)

PA・PD＝PB・PC　　つまり　3・5＝$x$・4　より　$\boldsymbol{x=\frac{15}{4}}$

(2)　(△PAB∽△PCD　より　PA：PC＝PB：PD　よって)

PA・PD＝PB・PC　つまり　4・9＝$x$・2$x$　より　$\boldsymbol{x=3\sqrt{2}}$

(3)　(△ABT∽△TBP　より　BT：BA＝BP：BT　よって)

$BT^2$＝BP・BA　つまり　$BT^2$＝4・8＝32　より　BT＝$4\sqrt{2}$

(△ACT∽△TCQ　より　CT：CA＝CQ：CT　よって)

$CT^2$＝CQ・CA　つまり　$CT^2$＝2・8＝16　より　CT＝4

したがって　$x$＝BT＋CT＝$\boldsymbol{4\sqrt{2}+4}$

「方べきの定理」は相似な三角形により導かれる．よってその「結果」であるから，方べきの定理が使えるときは相似比の式をわざわざ立式する必要がないのである．では，どのようなときに立式するか？　それは方べきの定理が使えないとき，である．(1)，(2)ともに「AB：CD」，(3)は「AT：TP」を使う，もしくは求めるときである．

**8** ①：∠B＋∠D＝190°より対角の和が180°にならず，円に内接しない．

②：∠BDC＝65°よりBCに関してAとDが同じ側にあり，∠BAC＝∠BDCより円に内接する．

③：∠A＝80°より対角の外角に等しいので，円に内接する．

以上より　**②と③**

円に内接する四角形を発見する練習である．四角形に内接するとわかったことが次の問題につながることが多い．

例えば②では∠BDC＝65°より∠ADC＝90°である．つまり△ACDはACを直径とする円に内接する．さらにその円周上に点Bが存在する．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第９講　三角比と平面図形(2)

**1** (1)　△ABC において，AB＝5，AC＝4，∠A＝60° とする．∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

(2)　△ABC において，BC＝5，CA＝4，AB＝6 とする．∠C の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ．

(1)　AD＝$x$ とすると，△ABC＝△ABD＋△ACD より

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \sin 30^\circ$$

$$5\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5x\cdot \frac{1}{2} + 4x\cdot \frac{1}{2} \qquad 9x = 20\sqrt{3} \qquad x = \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

よって　$\mathbf{AD = \dfrac{20\sqrt{3}}{9}}$

(2)　△ABC について余弦定理より

$$\cos A = \frac{16+36-25}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{27}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{9}{16}$$

角の二等分線の性質により　AD：BD＝CA：CB＝4：5

よって　$\mathrm{AD} = \dfrac{4}{9}\mathrm{AB} = \dfrac{4}{9}\cdot 6 = \dfrac{8}{3}$

したがって，△ACD で余弦定理より

$$\mathrm{CD}^2 = 16 + \frac{64}{9} - 2\cdot 4\cdot \frac{8}{3}\cdot \frac{9}{16} = \frac{100}{9} \qquad \text{ゆえに}\quad \mathbf{CD = \frac{10}{3}}$$

**2**　AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している．このとき，次のものを求めよ．

(1)　対角線 AC の長さ

(2)　四角形 ABCD の面積

(3)　対角線 AC と BD の交点を E とするとき，BE：ED

(1)　∠ABC＝$\theta$ とすると，∠ADC＝180°−$\theta$

△ABC で余弦定理より　$\mathrm{AC}^2 = 9+9-2\cdot 3\cdot 3\cdot \cos\theta = 18-18\cos\theta$　……①

△ADC で余弦定理より　$\mathrm{AC}^2 = 64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot \cos(180^\circ-\theta) = 89+80\cos\theta$　……②

①，②より　$18-18\cos\theta = 89+80\cos\theta$　　$\cos\theta = -\dfrac{71}{98}$

このとき①より　$\mathrm{AC}^2 = 18-18\cdot\left(-\dfrac{71}{98}\right) = 18\left(1+\dfrac{71}{98}\right) = 18\cdot\dfrac{169}{98} = \dfrac{9\cdot 169}{49}$

よって　$\mathrm{AC} = \dfrac{3\cdot 13}{7} = \mathbf{\dfrac{39}{7}}$

(2)　(四角形 ABCD)＝△ABC＋△ADC

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \sin(180^\circ-\theta) = \frac{1}{2}(9\sin\theta + 40\sin\theta)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$=\dfrac{1}{2}\cdot 49\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{2}\cdot 49\cdot\sqrt{1-\dfrac{71^2}{98^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot 49\cdot\sqrt{\dfrac{98^2-71^2}{98^2}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{49}{98}\sqrt{(98+71)(98-71)}=\dfrac{1}{4}\sqrt{169\cdot 27}=\boldsymbol{\dfrac{39\sqrt{3}}{4}}$

(3)　$\mathrm{BE}:\mathrm{ED}=\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADC}=\left(\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin\theta\right):\left(\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin\theta\right)$

$=(3\cdot 3):(8\cdot 5)=\boldsymbol{9:40}$

---

**3**　△ABC において，AB＝5，BC＝7，CA＝3 とする．∠A の二等分線が △ABC の外接円と交わる点を D，直線 AD と直線 BC の交点を E とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　∠A の大きさおよび線分 AE の長さを求めよ．

(2)　線分 BE，DE の長さを求めよ．

(3)　外接円の中心を O，半径を $R$ とする．$R$ の長さおよび tan∠OBD の値を求めよ．

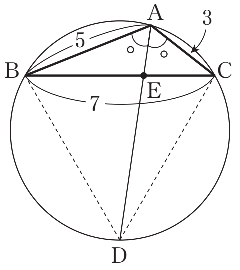
---

(1)　余弦定理より　$\cos A=\dfrac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5}=-\dfrac{1}{2}$　　よって　$\boldsymbol{\angle A=120^\circ}$

△ABC＝△ABE＋△ACE より

$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin 60^\circ$

$8\,\mathrm{AE}=15$　　よって　$\boldsymbol{\mathrm{AE}=\dfrac{15}{8}}$




(2)　角の二等分線の性質より　BE：CE＝AB：AC＝5：3

よって　$\mathrm{BE}=\dfrac{5}{8}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{8}\cdot 7=\boldsymbol{\dfrac{35}{8}}$　　したがって　$\mathrm{CE}=\dfrac{21}{8}$

方べきの定理により　AE・DE＝BE・CE

つまり　$\dfrac{15}{8}\cdot\mathrm{DE}=\dfrac{35}{8}\cdot\dfrac{21}{8}$　　よって　$\boldsymbol{\mathrm{DE}=\dfrac{49}{8}}$

(3)　△ABC で正弦定理より　$2R=\dfrac{7}{\sin 120^\circ}$　　よって　$\boldsymbol{R=\dfrac{7}{\sqrt{3}}}$

したがって　$\mathrm{OB}=R=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

ここで，弧 DC に対する円周角より　∠DBC＝∠DAC＝60°

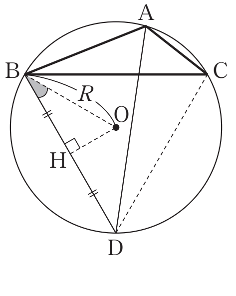
弧 BD に対する円周角より　∠BCD＝∠BAD＝60°

よって △BCD は正三角形であることより，BD＝BC＝7

また，O から線分 BD に垂線を下ろしたときの交点を H とすると，円の弦の性質により H は線分 BD の中点である．

よって　$\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}=\dfrac{7}{2}$

したがって三平方の定理より




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{\frac{49}{3}-\frac{49}{4}}=7\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\frac{7}{\sqrt{12}}$$

ゆえに　$\tan\angle\mathrm{OBD}=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{BH}}=\dfrac{\frac{7}{\sqrt{12}}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{12}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

（※　$\angle\mathrm{BOD}=2\angle\mathrm{BAD}=2\cdot 60^\circ=120^\circ$

$\triangle\mathrm{OBD}$ は $\mathrm{OB}=\mathrm{OD}$ の二等辺三角形であるから，

$$\angle\mathrm{OBD}=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle\mathrm{BOD})=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$$

よって　$\tan\angle\mathrm{OBD}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　）



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第9講　三角比と平面図形(2)

△ABC において，AB＝15，AC＝10，∠A＝60° とすると，BC＝［ア］$\sqrt{［イ］}$ である．∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると BD＝［ウ］$\sqrt{［エ］}$，AD＝［オ］$\sqrt{［カ］}$ である．また cos∠ABC＝$\dfrac{［キ］}{\sqrt{［ク］}}$ であることより，辺 BC の中点を E とすると AE＝$\dfrac{［ケ］\sqrt{［コサ］}}{［シ］}$ である．

△ABC について余弦定理より

$$BC^2=225+100-2\cdot15\cdot10\cdot\cos60^\circ=175$$

よって　$BC=\mathbf{5\sqrt{7}}$

角の二等分線の性質より　BD：DC＝AB：AC＝3：2

よって　$BD=\dfrac{3}{5}BC=\mathbf{3\sqrt{7}}$

また，△ABC＝△ABD＋△ACD　より

$$\frac{1}{2}\cdot15\cdot10\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot15\cdot AD\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot10\cdot AD\cdot\sin30^\circ$$

$$30\sqrt{3}=5AD$$

よって　$AD=\mathbf{6\sqrt{3}}$

△ABC について余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{225+175-100}{2\cdot15\cdot5\sqrt{7}}=\frac{12}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{7}}}$$

また，$BE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ であり，AE＝$x$ とおくと，△ABE について余弦定理より

$$x^2=15^2+\left(\frac{5\sqrt{7}}{2}\right)^2-2\cdot15\cdot\frac{5\sqrt{7}}{2}\cdot\cos\angle ABC=\frac{900}{4}+\frac{175}{4}-\frac{600}{4}=\frac{475}{4}$$

したがって　$x=AE=\dfrac{\mathbf{5\sqrt{19}}}{\mathbf{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。